

Polinomis i fraccions algebraiques.

Activitats

1.- Calcula el valor numèric dels següents polinomis:

- $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ per a $x = 2$
- $P(x) = 3x^4 - 8x^2 + 5$ per a $x = 1$
- $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ per a $x = -3$
- $P(x) = 2x^3 + x + 8$ per a $x = 10$
- $P(x) = x^5 + 2x^4 + 10x^2 + 2x$ per a $x = -1$

2.- Demuestra que:

a) $(A - B)^2 = (B - A)^2$ b) $(A + B)^2 = (-A - B)^2$ c) $\frac{(A+B)^2}{4} - \frac{(A-B)^2}{4} = A \cdot B$

3.- Donats els polinomis $P(x) = 2x + 3$; $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ i $R(x) = x^4 - 1$.

Calcula:

a) $P(x) \cdot Q(x) + 2R(x) =$ b) $R(x) - Q(x) \cdot [2 - P(x)] =$ c) $\{[P(x)]^2 + Q(x)\} \cdot x - R(x) =$

4.- Donats els següents polinomis:

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ $Q(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + 4$ $R(x) = 3x^2 - 5x + 5$ $S(x) = 3x - 2$

Troba els següents productes de polinomis:

- $P(x) \cdot R(x) =$
- $P(x) \cdot S(x) =$
- $Q(x) \cdot S(x) =$
- $P(x) \cdot Q(x) =$
- $R(x) \cdot S(x) =$
- $[P(x)]^2 =$
- $[Q(x)]^2 =$
- $Q(x) \cdot P(x) =$

5.- Calcula les següents divisions de polinomis, indicant en cada cas quin és el quocient $Q(x)$ i el residu $R(x)$ del resultat:

- $(6x^6 - 2x^5 - 11x^4 + 3x^3 + 18x^2 - 5x - 5) \div (2x^4 - 3x^2 + 5) =$
- $(4x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1) \div (4x^3 - 4x^2 + 2x) =$
- $(x^8) \div (x^6 - x^4 + x^2 - 1) =$
- $(4x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 5) \div (2x^2 - x + 3) =$

6.- Usant les identitats notables, desenvolupa les següents expressions algebraiques:

- $(x + 2)^2 =$
- $(x - 3)^2 =$
- $(x - 1)(x + 1) =$
- $(1 + 2x)^2 =$
- $(3x - 5)^2 =$
- $(2x + 5)(2x - 5) =$
- $(x + \sqrt{3})^2 =$
- $(x^2 + 2x - 3)^2 =$
- $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) =$

7.- Esbrina de quins productes notables provenen els següents polinomis:

- $3x^2 + 6x + 3 =$
- $4x^2 + 4x + 1 =$
- $4x^2 - 9 =$
- $5 - x^2 =$
- $x^2 - 6x + 9 =$
- $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 =$
- $a^2x^2 - b^2 =$
- $a^2x^2 - 2ax + 1 =$

8.- Calcula les següents divisions de polinomis, emprant el mètode de Ruffini. Indica en cada cas quin és el quocient $Q(x)$ i el residu $R(x)$ del resultat:

- $(x^3 - 4x^2 + 5x - 8) \div (x - 2) =$
- $(x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 2) \div (x - 1) =$
- $(2x^4 + x^3 - 2x - 1) \div (x + 2) =$
- $(2x^5 + 3x^2 - 6) \div (x + 3) =$
- $(3x^4 - 10x^3 - x^2 - 20x + 5) \div (x - 4) =$
- $(10x^3 - 15) \div (x + 5) =$

9.- Troba el valor de m, perquè les següents divisions siguin exactes:

a) $(3x^2 + mx - 2) \div (x + 2) =$

d) $(x^3 + mx + 10) \div (x + 5) =$

b) $(mx^3 + x^2 - 3x - 6) \div (x + 1) =$

e) $(x^4 + 6x^3 + mx^2 + 5x - 3) \div (x + 3) =$

c) $(5x^3 - 12x^2 + 4x + m) \div (x - 2) =$

10.- El polinomi $P(x) = x^2 + ax + b$, és divisible per $(x + 1)$. Alhora, quan el dividim per $(x - 1)$ i per $(x - 3)$ obtenim el mateix residu. Quant valen a i b?

11.- Factoritza els següents polinomis:

a) $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2 =$

d) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x =$

b) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 =$

e) $x^4 - 13x^2 + 36 =$

c) $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x =$

f) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 =$

12.- Utilitza les identitats notables per a simplificar les següents fraccions algebraiques:

a) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} =$

d) $\frac{2x^2-2}{3x^2+6x+3} =$

g) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4} =$

b) $\frac{x^2-16}{x^2-4x} =$

e) $\frac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma} =$

h) $\frac{x^2+2x+1}{x^4-1} =$

c) $\frac{2x+4}{2x^2-8} =$

f) $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy} =$

i) $\frac{x^2-1}{x^3-3x^2+3x-1} =$

13.- Simplifica les següents fraccions algebraiques sempre que sigui possible, factoritzant el numerador i el denominador:

a) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} =$

c) $\frac{2x^2-3x+1}{2x^2-x-1} =$

e) $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-4x^2+x+6} =$

b) $\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} =$

d) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-2x^2-x+2} =$

f) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1} =$

14.- Factoritza els següents polinomis i troba'n els respectius m.c.m. i M.C.D.:

a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ $Q(x) = x^2 - 1$

b) $R(x) = x^2 + 5x + 6$ $S(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9$

c) $A(x) = x^2 + x - 2$ $B(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ $C(x) = x^2 + 4x + 4$

15.- Opera i simplifica, sempre que sigui possible:

a) $\frac{2x^2-5x}{x^2-9} - \frac{2x^2-4x+3}{x^2-9} =$

d) $\frac{2x+1}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x-5} =$

g) $\frac{1}{2x^2} \div \frac{x+3}{4x} =$

b) $\frac{-3x+1}{x+1} - \frac{5x+1}{x^2+x} =$

e) $\frac{2x+4}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x+2} =$

h) $\frac{1}{8x^3} \div \frac{4x+2}{3x^5} =$

c) $\frac{x}{x^2-3x-4} - \frac{2x}{x^2-1} + \frac{x^2-6x-4}{x^3-4x^2-x+4} =$

f) $\left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) \left(\frac{x+1}{x}\right) =$

i) $\frac{4x^2}{x+1} \div \frac{x^2-x}{x^2-2x+1} =$

Solucions:

1.- a) $P(2) = 21$ b) $P(1) = 0$ c) $P(-3) = 74$ d) $P(10) = 2018$ e) $P(-1) = 9$

3.- a) $4x^4 - x^3 - 6x^2 + 2x + 1$ b) $-x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ c) $2x^3 + 12x^2 + 10x - 1$

4.- a) $6x^5 - 19x^4 + 37x^3 - 41x^2 + 30x - 10$ b) $6x^4 - 13x^3 + 18x^2 - 14x + 4$
 c) $3x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ d) $2x^7 - 5x^6 + 13x^5 - 15x^4 + 22x^3 - 18x^2 + 16x - 8$
 e) $9x^3 - 21x^2 + 25x - 10$ f) $4x^6 - 12x^5 + 25x^4 - 32x^3 + 28x^2 - 16x + 4$
 g) $x^8 - 2x^7 + 7x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 16$ h) $2x^7 - 5x^6 + 13x^5 - 15x^4 + 22x^3 - 18x^2 + 16x - 8$

5.- a) $Q(x) = 3x^2 - x - 1$ $R(x) = 0$ b) $Q(x) = x^2 - x + 1$ $R(x) = 2x + 1$
 c) $Q(x) = x^2 + 1$ $R(x) = 1$ d) $Q(x) = 2x^3 + x^2 - x - 3$ $R(x) = 14$

6.- a) $x^2 + 4x + 4$ b) $x^2 - 6x + 9$ c) $x^2 - 1$ d) $4x^2 + 4x + 1$
 e) $9x^2 - 30x + 25$ f) $4x^2 - 25$ g) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$ h) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$
 i) $x^2 - 2$

7.- a) $(\sqrt{3}x + \sqrt{3})^2$ b) $(2x + 1)^2$ c) $(2x + 3)(2x - 3)$ d) $(\sqrt{5} + x)(\sqrt{5} - x)$
 e) $(x - 3)^2$ f) $(x - \sqrt{2})^2$ g) $(ax + b)(ax - b)$ h) $(ax - 1)^2$

8.- a) $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ $R(x) = -6$ b) $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 2$ $R(x) = 0$
 c) $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8$ $R(x) = 15$ d) $Q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 51x - 153$ $R(x) = -465$
 e) $Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 7x + 8$ $R(x) = 37$ f) $Q(x) = 10x^2 - 50x + 250$ $R(x) = -1265$

9.- a) $m = 5$ b) $m = -2$ c) $m = 0$ d) $m = -23$ e) $m = 11$

10.- $a = -4$, $b = -5$.

11.- a) $x^2(x - 1)(x + 1)(x + 5)$ b) $x^2(x + 1)(x - 2)(x + 2)$
 c) $x(x - 3)(x + 3)(x + 2)$ d) $x(x - 1)(x + 1)(x + 6)$
 e) $(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$ f) $(x - 1)(x + 1)(x - 3)^2$

12.- a) $\frac{x-1}{x+1}$ b) $1 + \frac{4}{x}$ c) $\frac{1}{x-2}$ d) $\frac{2x-2}{3x+3}$ e) $\frac{x+a}{m}$ f) $1 - \frac{y}{x}$
 g) $\frac{x+2}{x-2}$ h) $\frac{x+1}{x^3-x^2+x-1}$ i) $\frac{x+1}{(x-1)^2}$

13.- a) $\frac{x-1}{x+1}$ b) $\frac{x-1}{x+1}$ c) $\frac{2x-1}{2x+1}$ d) $\frac{x-3}{x+1}$ e) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$
 f) $x - 1$

14.- a) $\text{MCD}[P(x), Q(x)] = x + 1$ $\text{mcm}[P(x), Q(x)] = (x - 1)(x + 1)^2$
 b) $\text{MCD}[R(x), S(x)] = x + 3$ $\text{mcm}[R(x), S(x)] = (x + 1)(x + 2)(x + 3)^2$
 c) $\text{MCD}[A(x), B(x), C(x)] = x + 2$ $\text{mcm}[A(x), B(x), C(x)] = (x - 1)(x + 1)(x + 2)^2$

15.- a) $\frac{-1}{x-3}$ b) $\frac{-3x-1}{x}$ c) $\frac{1}{x^2-1}$ d) $\frac{2x+1}{(x-2)(x-5)}$ e) $\frac{2}{x-3}$
 f) $\frac{x}{x-1}$ g) $\frac{2}{x(x+3)}$ h) $\frac{3x^2}{16(2x+1)}$ i) $\frac{4x(x-1)}{x+1}$